旋转

1 复数

1.1 定义

先复习一下复数

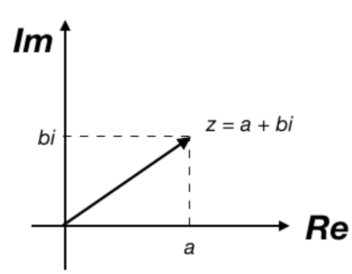
$$z = a + bi, z \in \mathbb{C}, a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1$$

复数可以看做 $(1, i)^T$ 这组基 (Basis) 的线性组合（Linear Combination），所以可以用向量来表示复数。

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

当然也就可以用复平面上的点来表示复数：

图 1: 复数



1.2 乘法

复数的乘法：$z_1 = a + bi, z_2 = c + di$

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a+bi)(c+di) \\ &= ac - bd + (bc + ad)i \end{aligned}$$

可以把它看做一个矩阵和一个向量相乘：

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

所以复数也可以看成矩阵：$z_1 = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, 把 z_2 也换成对应的矩阵：$\begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}$：

$$z_1 z_2 = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac - bd & -(ad + bc) \\ (ad + bc) & ac - bd \end{bmatrix}$$

这也足以证明复数看成矩阵是正确的，所以复数相乘这个运算，也可以看成是矩阵变换。

1 可以等价的看成 $z = 1 + 0 * i$，其矩阵形式为: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 即单位矩阵 I. i 为 $z = 0 + 1 * i$ 等价于 $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$:

$$i^2 = i \cdot i = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I = -1$$

这也说明了矩阵形式的正确性。

同时无论用代数形式或者向量形式，都可以验证复数的乘法满足交换律。

1.3 模与共轭

复数的模：

$$\|z\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

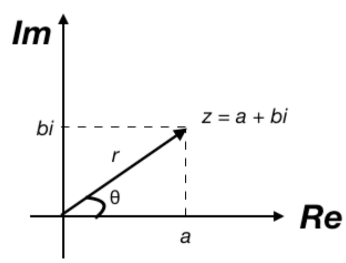
共轭 (Conjugate), 如果 $z = a + bi$，其共轭：

$$z^* = a - bi$$

可以算出：$\|z\|^2 = zz^*$
对比看它的向量形式：

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \sqrt{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{bmatrix} = \|z\| \begin{bmatrix} \frac{a}{\|z\|} \\ \frac{b}{\|z\|} \end{bmatrix} = \|z\| \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$$

图 2: 复数



所以复数有极坐标形式，经常被写作：$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$
又通过欧拉公式（$e^{ix} = \cos x + i\sin x$），可以写作：$z = re^{i\theta}$

1.4 复数的几种看法

所以上述给了我们几种看待复数的方式：

代数 $z = a + bi$

向量 $z = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

矩阵 $z = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$

极坐标 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

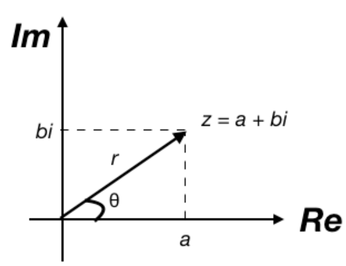
指数形式 $z = re^{i\theta}$

2 复数相乘与 2D 旋转

所以如果我们跟一个复数相乘，那么所做的矩阵变换是:

$$
\begin{aligned}
z = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} &= \sqrt{a^2+b^2} \begin{bmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{bmatrix} \\
&= \|z\| \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \\
&= \|z\| \cdot I \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \|z\| & 0 \\ 0 & \|z\| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

图 3: 复数



这是旋转变换与缩放变换的复合，所以如果将任何复数 c 与 z 相乘都是将 c 逆时针旋转 θ 度，并将其缩放 $\|z\| = \sqrt{a^2+b^2}$ 倍.

如果 $\|z\| = 1$，那么复数可以用一个单位向量表示，同时这个乘法只做旋转变换。

Theorem 1 (2D 旋转公式: 矩阵型)

$$\mathbf{v}' = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \mathbf{v}$$

利用复数的代数形式:

Theorem 2 (2D 旋转公式: 复数积型)

$$\begin{aligned} v' &= zv \\ &= (\cos\theta + i\sin\theta)v \end{aligned}$$

继续利用其指数形式:

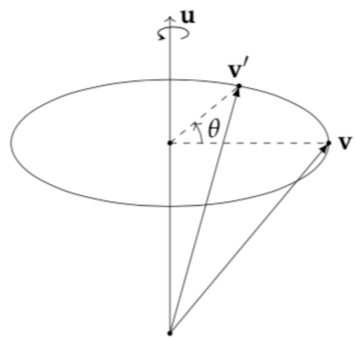
Theorem 3 (2D 旋转公式: 指数型)

$$v' = e^{i\theta}v$$

3 三维空间中的旋转

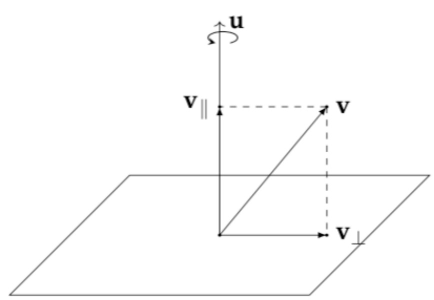
如果 $\mathbf{v}$ 绕着空间中的一个单位向量 $\mathbf{u}$ 旋转，旋转我们采用右手坐标系:

图 4: 三维空间中的旋转



可以把 $\mathbf{v}$ 分解成平行于 $\mathbf{u}$ 的向量 $\mathbf{v}_{||}$ 和 $\mathbf{v}_{\perp}$:

图 5: 旋转的分解



$\mathbf{v}_{||}$ 绕 $\mathbf{u}$ 旋转并不会造成什么改变。

Theorem 4（3D 旋转公式: 向量型，平行情况）
当 $\mathbf{v}_{||}$ 平行于旋转轴 $\mathbf{u}$ 时，旋转 θ 角度之后的 $\mathbf{v}'_{||}$ 为:

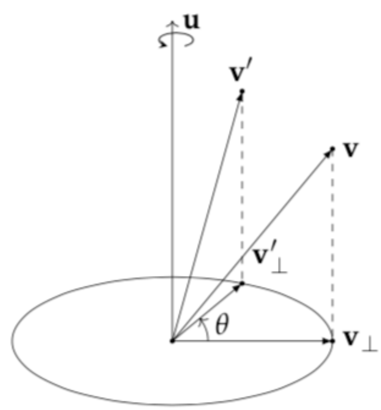
$$\mathbf{v}'_{||} = \mathbf{v}_{||}$$

根据正交投影公式:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_{||} &= proj_u(\mathbf{v}) \\
&= \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}\mathbf{u} \\
&= \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|u\|^2}\mathbf{u} && \|u\|^2 = 1 \\
&= (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{u}
\end{aligned}$$

观察 $\mathbf{v}_\perp$:

图 6: 旋转的分解

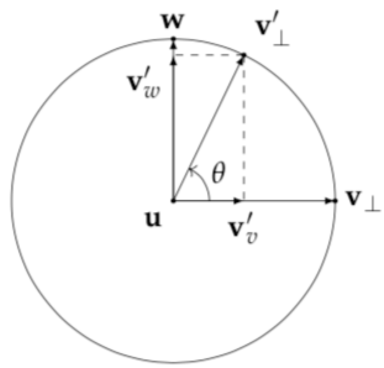


它可以表示为 2D 空间上的旋转，我们需要一组基来描述，可以选择 $\mathbf{v}_\perp$ 和 $\mathbf{w}$，$\mathbf{w}$ 可以通过叉乘构造出来，它垂直于 $\mathbf{w}$ 和 $\mathbf{v}_\perp$，注意右手准则:

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}_\perp$$

因为 $\mathbf{u}$ 是单位向量，上式算出来的 $\mathbf{w}$ 模长和 $\mathbf{v}_\perp$ 相同，所以下图是准确的:

图 7: 旋转的分解



有了这些条件之后:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}'_\perp &= \mathbf{v}'_\mathbf{v} + \mathbf{v}'_\mathbf{w} \\ &= \mathbf{v}'_\perp \cos\theta + \mathbf{w}\sin\theta \\ &= \mathbf{v}'_\perp \cos\theta + (\mathbf{u}\times\mathbf{v}_\perp)\sin\theta\end{aligned}$$

Theorem 5 (3D 旋转公式: 向量型，正交情况)

当 $\mathbf{v}_\perp$ 正交于旋转轴 $\mathbf{u}$ 时，旋转 θ 角度之后的 $\mathbf{v}'_\perp$ 为:

$$\mathbf{v}'_\perp = \mathbf{v}_\perp \cos\theta + (\mathbf{u}\times\mathbf{v}_\perp)\sin\theta$$

所以最终旋转得到的 $\mathbf{v}'$:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}' &= \mathbf{v}_{||} + \mathbf{v}'_\perp \\ &= \mathbf{v}_{||} + \mathbf{v}_\perp\cos\theta + (\mathbf{u}\times\mathbf{v}_\perp)\sin\theta\end{aligned}$$

又：

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \times \mathbf{v}_{\perp} &= \mathbf{u} \times (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{||}) \\
&= \mathbf{u} \times \mathbf{v} - \mathbf{u} \times \mathbf{v}_{||} \qquad\qquad (\mathbf{u} \times \mathbf{v}_{||} = 0) \\
&= \mathbf{u} \times \mathbf{v}
\end{aligned}$$

将上述结论，$\mathbf{v}_{||} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u}$ 以及 $\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{||}$ 代入回 $\mathbf{v}' = \mathbf{v}_{||} + \mathbf{v}_{\perp} \cos\theta + (\mathbf{u} \times \mathbf{v}_{\perp}) \sin\theta$：

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}' &= \mathbf{v}_{||} + \mathbf{v}_{\perp} \cos\theta + (\mathbf{u} \times \mathbf{v}_{\perp}) \sin\theta \\
&= (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u} + (\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}))\mathbf{u} \cos\theta + (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \sin\theta \\
&= \mathbf{v} \cos\theta + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u}(1 - \cos\theta) + (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \sin\theta
\end{aligned}$$

Theorem 6 (3D 旋转公式: 向量型，一般情况 Rodrigues'Rotation Formula)

3D 空间中任意一个 $\mathbf{v}$ *沿着单位向量* $\mathbf{u}$ *旋转* θ *角度之后的* $\mathbf{v}'$ *为*：

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} \cos\theta + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u}(1 - \cos\theta) + (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \sin\theta$$

4 旋转矩阵

4.1 绕坐标轴的旋转

绕着 z 轴旋转的 3d 矩阵写出来：

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

类似可以写出绕 x，y 轴旋转的矩阵：

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

4.2 绕向量 u 旋转

假设物体绕单位向量 $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}$ 旋转 θ, 可以写出旋转矩阵：

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta + u_x^2(1-\cos\theta) & u_xu_y(1-\cos\theta) - u_z\sin\theta & u_xu_z(1-\cos\theta) + u_y\sin\theta \\ u_yu_x(1-\cos\theta) + u_z\sin\theta & \cos\theta + u_y^2(1-\cos\theta) & u_yu_z(1-\cos\theta) - u_x\sin\theta \\ u_zu_x(1-\cos\theta) - u_y\sin\theta & u_zu_y(1-\cos\theta) + u_x\sin\theta & \cos\theta + u_z^2(1-\cos\theta) \end{bmatrix}$$

具体推导过程可以参见这篇文章 9.2 部分.
同时 R 也可以展开写成：

$$R = \cos\theta \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + (1-\cos\theta) \begin{bmatrix} u_x^2 & u_xu_y & u_xu_z \\ u_yu_x & u_y^2 & u_yu_z \\ u_zu_x & u_zu_y & u_z^2 \end{bmatrix} + \sin\theta \begin{bmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{bmatrix}$$

其中：

$$\begin{bmatrix} u_x^2 & u_xu_y & u_xu_z \\ u_yu_x & u_y^2 & u_yu_z \\ u_zu_x & u_zu_y & u_z^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z \end{bmatrix} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} = \mathbf{u}\mathbf{u}^T$$

可以把这个矩阵看成外积或者转置形式。

而 $\begin{bmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{bmatrix}$ 则是一个反对称矩阵（反对称矩阵为 $A^T = -A$，即 $a_{ij} = -a_{ji}$），可以找到它对应的向量 $\mathbf{u}$, 通常我们会这样表示，如果 $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}$，则我们用 $[u]_x$ 表示它的反对称矩阵:

$$[u]_x = \begin{bmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{bmatrix}$$

所以 R 也可以写成:

$$R(\mathbf{u}, \theta) = \cos\theta I + (1 - \cos\theta)(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \sin\theta[\mathbf{u}]_x$$

非常类似罗德里格旋转公式，其实我们也可以用推导罗德里格旋转公式的方法来推导出旋转矩阵。

4.3 正交矩阵

旋转矩阵的一个重要特点是它是一个正交矩阵，它的转置等于其逆，也就是满足: $R^T = R^{-1}, RR^T = I$。

旋转矩阵的逆就是绕着轴转 $-\theta$，所以它的逆可以写成:

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) + u_x^2(1 - \cos(-\theta)) & u_x u_y(1 - \cos(-\theta)) - u_z \sin(-\theta) & u_x u_z(1 - \cos(-\theta)) + u_y \sin(-\theta) \\ u_y u_x(1 - \cos(-\theta)) + u_z \sin(-\theta) & \cos(-\theta) + u_y^2(1 - \cos(-\theta)) & u_y u_z(1 - \cos(-\theta)) - u_x \sin(-\theta) \\ u_z u_x(1 - \cos(-\theta)) - u_y \sin(-\theta) & u_z u_y(1 - \cos(-\theta)) + u_x \sin(-\theta) & \cos(-\theta) + u_z^2(1 - \cos(-\theta)) \end{bmatrix}$$

又 $\cos\theta = \cos(-\theta), \sin\theta = -\sin\theta$:

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta + u_x^2(1-\cos\theta) & u_xu_y(1-\cos\theta) + u_z\sin\theta & u_xu_z(1-\cos\theta) - u_y\sin\theta \\ u_yu_x(1-\cos\theta) - u_z\sin\theta & \cos\theta + u_y^2(1-\cos\theta) & u_yu_z(1-\cos\theta) + u_x\sin\theta \\ u_zu_x(1-\cos\theta) + u_y\sin\theta & u_zu_y(1-\cos\theta) - u_x\sin\theta & \cos\theta + u_z^2(1-\cos\theta) \end{bmatrix}$$

对比旋转矩阵：

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta + u_x^2(1-\cos\theta) & u_xu_y(1-\cos\theta) - u_z\sin\theta & u_xu_z(1-\cos\theta) + u_y\sin\theta \\ u_yu_x(1-\cos\theta) + u_z\sin\theta & \cos\theta + u_y^2(1-\cos\theta) & u_yu_z(1-\cos\theta) - u_x\sin\theta \\ u_zu_x(1-\cos\theta) - u_y\sin\theta & u_zu_y(1-\cos\theta) + u_x\sin\theta & \cos\theta + u_z^2(1-\cos\theta) \end{bmatrix}$$

可以直接看出来：$R^T = R^{-1}$

4.4 旋转轴与旋转角度

有了旋转矩阵，如果我们想从中得到旋转角度很容易：

$$R(\mathbf{u},\theta) = \cos\theta I + (1-\cos\theta)(\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) + \sin\theta[\mathbf{u}]_x$$

对式子两边取矩阵的迹(矩阵的迹: n x n 矩阵的迹是指对角线元素的和, $\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}_{1,1} + \mathbf{A}_{2,2} + \cdots + \mathbf{A}_{n,n}$)：

$$tr(R) = \cos\theta tr(I) + (1-\cos\theta)tr(u\otimes u) + \sin\theta tr([u]_x)$$

- tr(I) = 3，因为 I 是 3x3 的单位矩阵 - tr($[u]_x$) = 0，对角线和为 0 - tr($u\otimes u = uu^T$) = 1, 因为向量是单位向量，对角线算出来为 u 的模，即为 1

所以：

$$tr(R) = 1 + 2\cos\theta$$
$$\theta = \arccos(\frac{1}{2}[tr(R) - 1])$$

旋转轴的求法可以这样来看，平行于旋转轴的向量经过变换之后依旧平行于旋转轴，并不发生变化：

$$R\mathbf{u} = \mathbf{u}$$

所以 $\mathbf{u}$ 是 R 特征值为 1 的一个特征向量 (特征向量：对于一个给定的方阵 A，它的特征向量 v 经过这个线性变换之后，得到的新向量仍然与原来的保持在同一条直线上，但其长度或方向也许会改变)。

当然也可以有取巧的办法，观察一下旋转矩阵：

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta + u_x^2(1-\cos\theta) & u_x u_y(1-\cos\theta) - u_z\sin\theta & u_x u_z(1-\cos\theta) + u_y\sin\theta \\ u_y u_x(1-\cos\theta) + u_z\sin\theta & \cos\theta + u_y^2(1-\cos\theta) & u_y u_z(1-\cos\theta) - u_x\sin\theta \\ u_z u_x(1-\cos\theta) - u_y\sin\theta & u_z u_y(1-\cos\theta) + u_x\sin\theta & \cos\theta + u_z^2(1-\cos\theta) \end{bmatrix}$$

把它写成：

$$R = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} h-f \\ c-g \\ d-b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2u_x\sin\theta \\ 2u_y\sin\theta \\ 2u_z\sin\theta \end{bmatrix}$$

normalize 即可得 $\mathbf{u}$.

当然我们也可以先来求它的反对称矩阵 $[u]_x$，然后再来看 $\mathbf{u}$：

$$
\begin{aligned}
R - R^T = &\begin{bmatrix} \cos\theta + u_x^2(1-\cos\theta) & u_xu_y(1-\cos\theta) - u_z\sin\theta & u_xu_z(1-\cos\theta) + u_y\sin\theta \\ u_yu_x(1-\cos\theta) + u_z\sin\theta & \cos\theta + u_y^2(1-\cos\theta) & u_yu_z(1-\cos\theta) - u_x\sin\theta \\ u_zu_x(1-\cos\theta) - u_y\sin\theta & u_zu_y(1-\cos\theta) + u_x\sin\theta & \cos\theta + u_z^2(1-\cos\theta) \end{bmatrix} \\
- &\begin{bmatrix} \cos\theta + u_x^2(1-\cos\theta) & u_xu_y(1-\cos\theta) + u_z\sin\theta & u_xu_z(1-\cos\theta) - u_y\sin\theta \\ u_yu_x(1-\cos\theta) - u_z\sin\theta & \cos\theta + u_y^2(1-\cos\theta) & u_yu_z(1-\cos\theta) + u_x\sin\theta \\ u_zu_x(1-\cos\theta) + u_y\sin\theta & u_zu_y(1-\cos\theta) - u_x\sin\theta & \cos\theta + u_z^2(1-\cos\theta) \end{bmatrix} \\
= &\begin{bmatrix} 0 & -2u_z\sin\theta & 2u_y\sin\theta \\ 2u_z\sin\theta & 0 & -2u_x\sin\theta \\ -2u_y\sin\theta & 2u_x\sin\theta & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

所以:

$$
\frac{1}{2\sin\theta}(R - R^T) = \begin{bmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{bmatrix}
$$

得到了 $[u]_x$，当然 **u** 不成问题。

当然这个取巧的办法是有条件的，如果 R 是一个对称的矩阵，那么我们只能‘对角线化 R 并找到对应于特征值 1 的特征向量’。

5 四元数

5.1 定义

$$
q = a + bi + cj + dk, z \in \mathbb{H}, a, b, c, d \in \mathbb{R}
$$

其中:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

可以根据 $ijk = -1$ 来推导以下式子:

$$\begin{aligned} ij &= k, ji = -k \\ jk &= i, kj = -i \\ ki &= j, ik = -j \end{aligned}$$

跟复数类似，我们可以把四元数写成:

$$q = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

它的基是 $[1, i, j, k]^T$, 或者:

$$q = [s, \mathbf{v}], \mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, s, x, y, z \in R$$

5.2 模长

类似复数，四元数的模长（范数 Norm）定义为:

$$\|q\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

也可写成:

$$\|q\| = \sqrt{s^2 + \|\mathbf{v}\|^2} = \sqrt{s^2 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$$

5.3 乘法

同复数的乘法不同，四元数乘法不遵守交换律，所以有左乘和右乘的说法，结合律和分配律还是满足的。$q_1 = a + bi + cj + dk$,$q_2 = e + fi + gj + hk$:

$$
\begin{aligned}
q_1q_2 = &(a + bi + cj + dk)(e + fi + gj + hk) \\
=&ae + afi + agj + ahk+ \\
&bei + bfi^2 + bgij + bhik+ \\
&cej + cfji + cgj^2 + chjk+ \\
&dke + dfki + dgkj + dhk^2 \\
=&(ae - bf - cg - dh)+ \\
&(be + af - dg + ch)i+ \\
&(ce + df + ag - bh)j+ \\
&(de - cf + bg + ah)k
\end{aligned}
$$

类似的，我们也可以把它写成矩阵形式：

$$
q_1q_2 = \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{bmatrix}
$$

这个矩阵其实也很类似复数的矩阵：除了对角线上的元素 $a_{ij} = -a_{ji}$。
因为四元数左乘和右乘的结果不一样，所以它的右乘矩阵是不一样的。
继续观察它的乘积结果：

$$\begin{aligned} q_1q_2 = &(ae - bf - cg - dh) + \\ &(be + af - dg + ch)i + \\ &(ce + df + ag - bh)j + \\ &(de - cf + bg + ah)k \end{aligned}$$

又有 $q_1 = [a, \mathbf{v}], \mathbf{v} = \begin{bmatrix} b \\ c \\ d \end{bmatrix}, q_2 = [e, \mathbf{u}], \mathbf{u} = \begin{bmatrix} f \\ g \\ h \end{bmatrix}$，$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = bf + cg + dh, \mathbf{v} \times \mathbf{u} = \begin{bmatrix} I & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b & c & d \\ f & g & h \end{bmatrix} = (ch - dg)I - (bh - df)\mathbf{j} + (bg - cf)\mathbf{k}$

整理一下 q_1q_2

$$\begin{aligned} q_1q_2 = &(ae - (bf + cg + dh)) + \\ &(be + af + (ch - dg))i + \\ &(ce + ag - (bh - df))j + \\ &(de + ah + (bg - cf))k \end{aligned}$$

所以 q_1q_2 又可以写成：

$$q_1q_2 = [ae - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}, a\mathbf{u} + e\mathbf{v} + \mathbf{v} \times \mathbf{u}]$$

这个结论也被叫做 Graßmann 积 (Graßmann Product):

Theorem 7 (Graßmann 积)

对任意四元数 $q_1 = [s, \mathbf{v}], q_2 = [t, \mathbf{u}]$, q_1q_2 的结果是：

$$q_1q_2 = [st - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}, s\mathbf{u} + t\mathbf{v} + \mathbf{v} \times \mathbf{u}]$$

5.4 纯四元数

如果四元数的实部为 0，即：

$$v = [0, \mathbf{v}]$$

则称 v 为纯四元数。任意的 3D 向量都可以看作纯四元数，我们用 v 来代表 $\mathbf{v}$ 对应的四元数，两个纯四元数 $v = [0, \mathbf{v}], u = [0, \mathbf{u}]$，那么：

$$\begin{aligned} vu &= [0 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}, 0 + \mathbf{v} \times \mathbf{u}] \\ &= [-\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}, \mathbf{v} \times \mathbf{u}] \end{aligned}$$

其实这里就可以容易的验证左乘和右乘是不一样的。

5.5 共轭和逆

类似于复数，四元数的共轭 $q = [s, \mathbf{v}]$ 为 $q^* = [s, -\mathbf{v}]$, 同样类似于复数：

$$\begin{aligned} qq^* &= [s^2 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}, \mathbf{o}] \\ &= \|q\|^2 \end{aligned}$$

$(q^*)^* = q$，同理我们可知道：

$$q^*q = qq^*$$

这是关于共轭的特殊性质：这个乘法满足交换律。

因为四元数的乘法不遵守交换律，所以我们通常不会写 p/q，我们会将乘法的逆运算定义为 pq^{-1}，注意这一般不会同于 $q^{-1}p$.

q^{-1} 是 q 的逆：

$$qq^{-1} = q^{-1}q = 1 (q \neq 0)$$

右乘的逆运算为右乘 q^{-1}，左乘的逆运算为左乘 q^{-1}:

$$(pq)q^{-1} = p(qq^{-1}) = p\cdot 1 = p$$

$$q^{-1}(qp) = (q^{-1}q)p = 1\cdot p = p$$

如果我们想要计算 q^{-1}:

$$\begin{aligned}
&qq^{-1} = 1 \\
&q^*qq^{-1} = q^* \\
&\|q\|^2 q^{-1} = q^* \\
&q^{-1} = \frac{q^*}{\|q\|^2}
\end{aligned}$$

如果 $\|q\|^2 = 1$, 那么 $\mathbf{q}$ 是一个单位四元数，有:

$$q^{-1} = q^*$$

6 四元数与 3D 旋转

按照之前讨论过的方式，来让 $\mathbf{v}$ 沿着 $\mathbf{u}$ 旋转 θ 度，依旧拆分 $\mathbf{v}$ 为平行于 $\mathbf{u}$ 的向量 $\mathbf{v}_{||}$ 和 $\mathbf{v}_{\perp}$。分别旋转为 $\mathbf{v}'_{||}$ 和 $\mathbf{v}'_{\perp}$，旋转的最终结果为 $\mathbf{v}' = \mathbf{v}'_{||} + \mathbf{v}'_{\perp}$。

将这些向量定义为纯四元数:

$$\begin{aligned}
v &= [0, \mathbf{v}] & v' &= [0, \mathbf{v}'] \\
v_{\perp} &= [0, \mathbf{v}_{\perp}] & v'_{\perp} &= [0, \mathbf{v}'_{\perp}] \\
v_{||} &= [0, \mathbf{v}_{||}] & v'_{||} &= [0, \mathbf{v}'_{||}] \\
u &= [0, \mathbf{u}] & & \\
v &= v_{||} + v_{\perp} & v' &= v'_{||} + v'_{\perp}
\end{aligned}$$

6.1 垂直部分的旋转

根据之前推导的向量公式：

$$\mathbf{v}'_\perp = \mathbf{v}_\perp \cos\theta + (\mathbf{u} \times \mathbf{v}_\perp) \sin\theta$$

纯四元数有如下计算：

$$uv_\perp = [-\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_\perp, \mathbf{u} \times \mathbf{v}_\perp]$$

又 $\mathbf{v}_\perp$ 正交于 $\mathbf{u}$：

$$uv_\perp = \mathbf{u} \times \mathbf{v}_\perp$$

把这个结论代入之前的式子：

$$\begin{aligned} v'_\perp = & v_\perp \cos\theta + (uv_\perp) \sin\theta \\ = & (\cos\theta + u \sin\theta) v_\perp \end{aligned}$$

很有意思，如果我们把 $\cos\theta + u\sin\theta$ 看成一个四元数 q，那么垂直部分的旋转可以直接写成 $v'_\perp = qv_\perp$，构造 q 如下：

$$\begin{aligned} q = & \cos\theta + u \sin\theta \\ = & [\cos\theta, \mathbf{0}] + [0, \mathbf{u} \sin\theta] \\ = & [\cos\theta, \mathbf{u} \sin\theta] \end{aligned}$$

q 是单位四元数。

Theorem 8 (3D 旋转公式：四元数型，正交情况)
当 $\mathbf{v}_\perp$ 正交于旋转轴 $\mathbf{u}$ 时，旋转 θ 之后的 $\mathbf{v}'_\perp$ 可以使用四元数乘法来获得，令 $v_\perp = [0, \mathbf{v}_\perp], q = [\cos\theta, \mathbf{u}\sin\theta]$，那么：

$$v'_{\perp} = qv_{\perp}$$

6.2 平行部分的旋转

Theorem 9 (3D 旋转公式：四元数型，平行情况)

当 $\mathbf{v}_{||}$ 平行于旋转轴 $\mathbf{u}$ 时，旋转 θ 之后的 $\mathbf{v}'_{||}$ 可以用四元数写为：

$$v'_{||} = v_{||}$$

6.3 一般情况的旋转

我们可以来计算一般情况下 v' 的结果：

$$\begin{aligned} v' &= v'_{||} + v'_{\perp} \\ &= v_{||} + qv_{\perp} \qquad\qquad (q = [\cos\theta, \mathbf{u}\sin\theta]) \end{aligned}$$

可以拆开 $v'_{||}$ 和 $v'_{\perp}$ 来化简，但我们将使用更简单的方法。

先证明以下引理：

Lemma 1

如果 $q = [\cos\theta, \mathbf{u}\sin\theta]$，并且 $\mathbf{u}$ 为单位向量，那么 $q^2 = qq = [\cos 2\theta, \mathbf{u}\sin 2\theta]$

这个直接用 Graßmann 积展开相乘就可以证明。同时它的几何意义为：如果绕着同一个轴 $\mathbf{u}$ 连续旋转 θ 度两次，那么所做出的变换等同于直接绕着 $\mathbf{u}$ 旋转 2θ .

$$\begin{aligned} v' &= v_{||} + qv_{\perp} && (q = [\cos\theta, \mathbf{u}\sin\theta]) \\ &= 1 \cdot v_{||} + qv_{\perp} \\ &= pp^{-1}v_{||} + ppv_{\perp} && (q = p^2, p = [\cos\frac{\theta}{2}, \mathbf{u}\sin\frac{\theta}{2}]) \end{aligned}$$

我们引入了新的四元数 $p = [\cos\frac{\theta}{2}, \mathbf{u}\sin\frac{\theta}{2}]$，用引理可以轻易说明 $q = p^2$ 成立。同时 q 也是单位四元数。所以：

$$p^{-1} = p^*$$

$$\begin{aligned} v' &= pp^{-1}v_{||} + ppv_{\perp} \\ &= pp^*v_{||} + ppv_{\perp} \end{aligned}$$

继续引入引理和化简：

Lemma 2

假设 $v_{||} = [0, \mathbf{v}_{||}]$ 是一个纯四元数，而 $q = [\alpha, \mathbf{u}\beta]$，其中 $\mathbf{u}$ 是一个单位向量，$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$。在这种条件下，如果 $\mathbf{v}_{||}$ 平行于 $\mathbf{u}$，那么 $qv_{||} = v_{||}q$

同样用 Graßmann 积展开可证。

Lemma 3 假设 $v_{||} = [0, \mathbf{v}_{\perp}]$ 是一个纯四元数，而 $q = [\alpha, \mathbf{u}\beta]$，其中 $\mathbf{u}$ 是一个单位向量，$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$。在这种条件下，如果 $\mathbf{v}_{\perp}$ 正交于 $\mathbf{u}$，那么 $qv_{\perp} = v_{\perp}q$

同样 Graßmann 积展开可证。

现在我们来进行最后的变形：

$$
\begin{aligned}
v' &= pp^* v_{||} + ppv_{\perp} \\
&= pv_{||}p^* + pv_{\perp}p* = \qquad\qquad p(v_{||} + v_{\perp})p^*
\end{aligned}
$$

$v_{||} + v_{\perp} = v$，撒花：

$$v' = pvp^*$$

这很有意思，虽然我们进行了很多拆分，但是最后我们还是回到 v 本身。

> 3D 空间中任意一个旋转都能够用三个四元数相乘的形式表达出来

Theorem 10 (3D 旋转公式：四元数型，一般情况)

任意向量 $\mathbf{v}$ 沿着以单位向量定义的旋转轴 $\mathbf{u}$ 旋转了 θ 之后的 $\mathbf{v}'$ 可以使用四元数乘法来获得，令 $v = [0, \mathbf{v}], q = [\cos\frac{\theta}{2}, \mathbf{u}\sin\frac{\theta}{2}]$，那么：

$$v' = qvq^* = qvq^{-1}$$

可能第一次看也会有点疑惑，比如为什么 $q = [\cos\frac{\theta}{2}, \mathbf{u}\sin\frac{\theta}{2}]$，为什么有这个 $\frac{\theta}{2}$，实际上来看这个式子更直观一些：

$$v' = qvq^* = qq^*v_{||} + qqv_{\perp} = v_{||} + q^2 v_{\perp}$$

也就是这个变换，对 $v_{||}$ 实施 qq^*，也就抵消了，没有旋转，而对于 $v_{\perp}$ 则是旋转了 $\frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2}$，也就是 θ.

这个也可以推导回 Rodrigues'Rotation Formula，利用 $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$ 可证：

$$qvq^* = [0, \mathbf{v}\cos\theta + (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{u}(1-\cos\theta) + (\mathbf{u}\times\mathbf{v})\sin\theta]$$

所以单位四元数 $q = [a, \mathbf{b}]$ 对应的旋转角和旋转轴为：

$$\theta/2 = \cos^{-1} a$$
$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{b}}{\sin\theta/2}$$

6.4 3D 旋转的矩阵形式

左乘一个四元数 $q = a + bi + cj + dk$ 等同于如下矩阵：

$$\begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix}$$

右乘 q 等同于如下矩阵：

$$\begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{bmatrix}$$

我们可以利用公式 $v' = qvq^*$ 将其写为矩阵形式，$a = \cos\frac{\theta}{2}, b = u_x \sin\frac{\theta}{2}, c = u_y \sin\frac{\theta}{2}, d = u_z \sin\frac{\theta}{2}$，再根据 q 是单位四元数的事实，最终可化简为：

$$q = L(q)R(q^*)v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-2c^2-2d^2 & 2bc-2ad & 2ac+2bd \\ 0 & 2bc+2ad & 1-2b^2-2d^2 & 2cd-2ab \\ 0 & 2bd-2ac & 2ab+2cd & 1-2b^2-2c^2 \end{bmatrix} v$$

矩阵最外圈的变换不会对 v 进行任何变换，我们可以把它压缩成 3x3 矩阵（用作 3D 向量的变换):

Theorem 11 (3D 旋转公式：矩阵型)

任意向量 $\mathbf{v}$ 沿着以单位向量定义的旋转轴 $\mathbf{u}$ 旋转了 θ 之后的 $\mathbf{v}'$ 可以使用矩阵乘法来获得，令 $a = \cos\frac{\theta}{2}, b = u_x \sin\frac{\theta}{2}, c = u_y \sin\frac{\theta}{2}, d = u_z \sin\frac{\theta}{2}$，那么：

$$v' = \begin{bmatrix} 1-2c^2-2d^2 & 2bc-2ad & 2ac+2bd \\ 2bc+2ad & 1-2b^2-2d^2 & 2cd-2ab \\ 2bd-2ac & 2ab+2cd & 1-2b^2-2c^2 \end{bmatrix} v$$

实际上如果我们进一步代入 $\cos\theta, \sin\theta$，我们可以把它最终化简为常见的旋转矩阵：

$$R(\mathbf{u},\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta + u_x^2(1-\cos\theta) & u_x u_y(1-\cos\theta) - u_z\sin\theta & u_x u_z(1-\cos\theta) + u_y\sin\theta \\ u_y u_x(1-\cos\theta) + u_z\sin\theta & \cos\theta + u_y^2(1-\cos\theta) & u_y u_z(1-\cos\theta) - u_x\sin\theta \\ u_z u_x(1-\cos\theta) - u_y\sin\theta & u_z u_y(1-\cos\theta) + u_x\sin\theta & \cos\theta + u_z^2(1-\cos\theta) \end{bmatrix}$$

6.5 单位四元数与旋转的指数表示

再仔细观察一下之前得到的定理：任意向量 $\mathbf{v}$ 沿着以单位向量定义的旋转轴 $\mathbf{u}$ 旋转了 θ 之后的 $\mathbf{v}'$ 可以使用四元数乘法来获得，令 $v = [0, \mathbf{v}], q = [\cos\frac{\theta}{2}, \mathbf{u}\sin\frac{\theta}{2}]$，那么：

$$v' = qvq^* = qvq^{-1}$$

向量 $\mathbf{v}$ 对应的四元数是一个实部为 0 的纯四元数，$q = [\cos\frac{\theta}{2}, \mathbf{u}\sin\frac{\theta}{2}]$ 对应的四元数则并不是一个纯的四元数，它是一个单位四元数：

$$
\begin{aligned}
\|q\| &= \sqrt{\cos^2\frac{\theta}{2} + \|\mathbf{u}\|^2 \sin^2\frac{\theta}{2}} \\
&= \sqrt{\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}} && (\|\mathbf{u}\|^2 = 1) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

$\|\mathbf{u}\|^2 = 1$ 是因为 $\mathbf{u}$ 是单位向量，正因为这个限制，所以其实用来旋转的单位四元数自由度 (degree of freedom) 也是 3。

然后发现单位四元数也叫规范化四元数，英文是Versor

不同于复数在二维平面的旋转：$v' = zv$，我们用了两个单位四元数，一个左乘，一个右乘。具体的关于这个式子的解读之前也写过，wikipedia 上的这段话也可以给一些 hint：

> "A single multiplication by a versor, either left or right, is itself a rotation, but in four dimensions. Any four-dimensional rotation about the origin can be represented with two quaternion multiplications: one left and one right, by two different unit quaternions."

如果像之前对待复数那样来对待单位四元数，我们当然知道四元数也可以有好多种形式：代数形式、向量形式、矩阵形式，当然还有重要的指数形式 (polar/exponential form).

这里需要注意，要搞明白：四元数的指数形式 vs 四元数的指数。对一个单位四元数 $u = [0, \mathbf{u}]$ ，我们来看它的指数：

$$
e^{u\theta} = \cos\theta + u\sin\theta = \cos\theta + \mathbf{u}\sin\theta
$$

刚好对应 $q = [\cos\theta, \mathbf{u}\sin\theta]$. 这里的意思是对于四元数 $q = [\cos\theta, \mathbf{u}\sin\theta]$ 我们可以把它写成另一个四元数的指数形式，也就是 $e^{u\theta}$.

来观察一下 $u^2 = [-\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}, 0] = -\|\mathbf{u}\|^2 = -1$, 这也非常类似欧拉公式中的 i.

实际上，更一般的结论是对于任何一个四元数 $q = a + bi + cj + dk$ 我们可以把它表示为指数形式：

$$q = ||q||(\cos\theta + \mathbf{n}\sin\theta)$$

其中:

$$||q|| = \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}\cos\theta = \frac{a}{||q||}, \sin\theta = \frac{\mathbf{v}}{||q||}\mathbf{n} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$$

因为旋转使用的四元数对应的都是单元四元数，所以对我们来说更关注单位四元数，也就是 versor。

代数 $q = \cos\theta + iu_x\sin\theta + ju_y\sin\theta + ku_z\sin\theta$

向量 $q = [\cos\theta, \mathbf{u}\sin\theta]$

矩阵

指数形式 $q = [\cos\theta, \mathbf{u}\sin\theta]$ 可以 $u = [0, \mathbf{u}]$ 的指数形式 $q = e^{u\theta}$

所以旋转公式 $v' = qvq^* = qvq^{-1}$ 也可以这样解读:

Theorem 12 (3D 旋转公式：指数型)
任意向量 $\mathbf{v}$ 沿着以单位向量定义的旋转轴 $\mathbf{u}$ 旋转了 θ 之后的 $\mathbf{v}'$ 可以使用四元数的指数表示，令 $v = [0, \mathbf{v}], u = [0, \mathbf{u}]$，那么:

$$v' = e^{u\frac{\theta}{2}}ve^{-u\frac{\theta}{2}}$$

6.6 旋转的复合

之前在 $q^2 = [\cos 2\theta, \mathbf{u}\sin 2\theta]$ 之处已经涉及到了，这里继续考虑更一般的情况。

q_1, q_2 分别表示沿着不同轴，不同角度旋转的四元数。先按照 q_1 变换，再按照 q_2 变换，最终变换的结果是:

$$v' = q_1 v q_1^*$$

$$\begin{aligned} v'' &= q_2 v' q_2^* \\ &= q_2 q_1 v q_1^* q_2^* \end{aligned}$$

Lemma 4

对任意四元数 $q_1 = [s, \mathbf{v}], q_2 = [t, \mathbf{u}]$:

$$q_1^* q_2^* = (q_2 q_1)^*$$

Graßmann 积展开可证。

所以上面的式子我们可以写成:

$$\begin{aligned} v'' &= q_2 q_1 v q_1^* q_2^* \\ &= (q_2 q_1) v (q_2 q_1)^* \\ &= q_{net} v q_{net}^* \end{aligned}$$

$q_{net} = q_2 q_1$, 注意乘法的顺序，先进行 q_1 的变换，再进行 q_2 的变换。

> 要注意的是，q_1 与 q_2 的等价旋转 q_{net} 并不是分别沿着 q_1 和 q_2 的两个旋转轴进行的两次旋转. 它是沿着一个全新的旋转轴进行的一次等价旋转，仅仅只有旋转的结果相同.

同样这个结果也很容易推广到多个旋转的复合。

6.7 指数形式

$q = [\cos\theta, \mathbf{u}\sin\theta]$ 可以写成另一个纯单位四元数 $u = [0, \mathbf{u}]$ 的指数形式 $q = e^{u\theta}$

有了单位四元数的指数形式，我们可以定义单位四元数更多的运算了：

$$\log q = \log e^{u\theta} = [0, \mathbf{u}\theta]$$

单位四元数的幂运算：

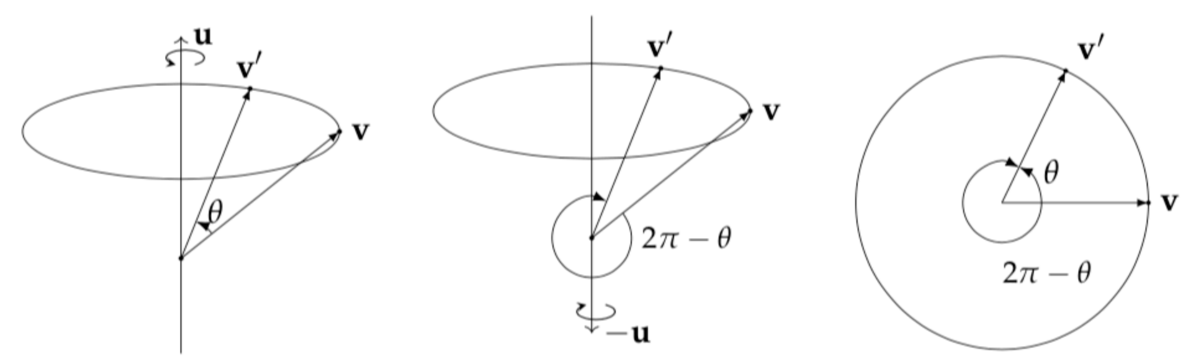
$$q^t = (e^{u\theta})^t = e^{u(t\theta)} = [\cos t\theta, \mathbf{u}\sin t\theta]$$

> "可以看到，一个单位四元数的 t 次幂等同于将它的旋转角度缩放至 t 倍，并且不会改变它的旋转轴."

6.8 双倍覆盖

四元数与 3D 旋转并不是一对一的关系，同一个 3D 旋转可以写成 $q = [\cos\frac{\theta}{2}, \mathbf{u}\sin\frac{\theta}{2}]$，也可以写成 $-q = [\cos(-\frac{\theta}{2}), -\mathbf{u}\sin(-\frac{\theta}{2})] = [\cos\frac{\theta}{2}, \mathbf{u}\sin\frac{\theta}{2}]$. 意思是如果沿着相反的轴 $-\mathbf{u}$ 转 $-\theta$ 也就是 $(2\pi - \theta)$，如下图：

图 8: 双倍覆盖



这也可以通过旋转公式看出：

$$(-q)v(-q)^* = (-1)^2 qvq^* = qvq^*$$

"所以，我们经常说单位四元数与 3D 旋转有一个「2 对 1 满射同态」(2-1 Surjective Homomorphism) 关系，或者说单位四元数双倍覆盖 (Double Cover) 了 3D 旋转."

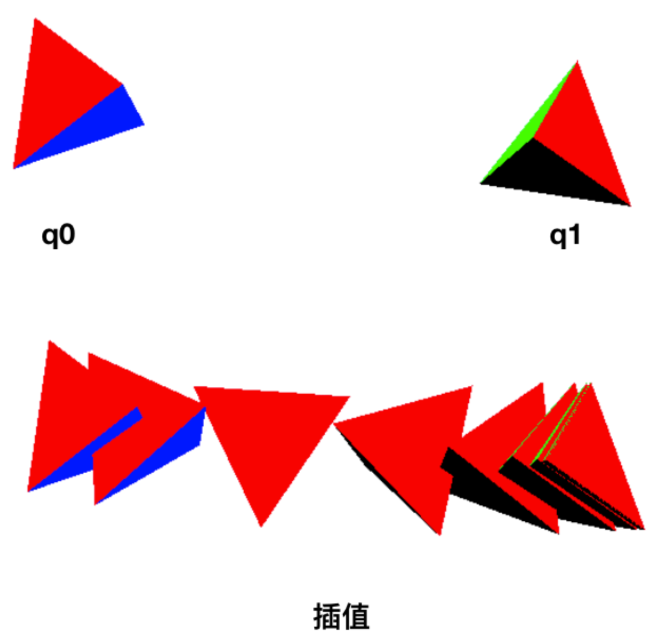
7 旋转的插值-四元数

有了以上的预备知识，我们就能开始讨论旋转的插值了，当然，在这里，也就是四元数的插值（Interpolation）.

假设有两个旋转变换 $q_0 = [\cos\theta_0, \mathbf{u_0}\sin\theta_0]$ 和 $q_1 = [\cos\theta_1, \mathbf{u_1}\sin\theta_1]$ ，我们希望找出中间变换 $q_t, t \in [0,1]$，使得初始变换 q_0 能平滑的过渡到最终变换 q_1, $t = 0$ 时 $q_t = q_0, t = 1$ 时 $q_t = q_1$.

如果觉得这样不太好抽象理解的话，那么假设空间中有两个四面体，一个旋转是 q_0, 另一个是 q_1，我们要做的事就是线性的将 q_0 变换到 q_1:

图 9: 旋转的插值



假设我们已经有了这个变换:

$$\Delta q q_0 = q_1$$

那么,

$$\Delta q q_0 q_0^{-1} = q_1 q_0^{-1}$$
$$\Delta q = q_1 q_0^{-1}$$

又旋转所用的四元数都是单位四元数，所以 $q^{-1} = q_0$, 所以又可以写成:

$$\Delta q = q_1 q_0^*$$

再根据我们之前得到的结论:

> “可以看到，一个单位四元数的 t 次幂等同于将它的旋转角度缩放至 t 倍，并且不会改变它的旋转轴.”

我们对 Δq 取 t 次方, $(\Delta q)^t$ 就能缩放这个旋转所对应的的角度了，插值的公式为:

$$q_t = (q_1 q_0^*)^t q_0$$

可以验证：$t = 0, q_t = q_0.t = 1, q_t = (q_1 q_0^*) q_0 = q_1 (q_0^* q_0) = q_1$，如果 t 为中间值，它进行的响应的插值变换。

Theorem 13 (旋转的插值)

假设有两个旋转变换 $q_0 = [\cos\theta_0, \mathbf{u_0}\sin\theta_0]$ 和 $q_1 = [\cos\theta_1, \mathbf{u_1}\sin\theta_1]$，初始变换 q_0 能平滑的过渡到最终变换 q_1 的中间变换 q_t 为:

$$q_t = (q_1 q_0^*)^t q_0, t \in [0, 1]$$

7.1 3D 空间旋转变化量 vs 四元数 4D 向量空间夹角

$$\begin{aligned}\Delta q &= q_1 q_0^* \\ &=[\cos\theta_1, \mathbf{u_1}\sin\theta_1][\cos\theta_0, -\mathbf{u_0}\sin\theta_0] \\ &=[\cos\theta_1\cos\theta_0 - \mathbf{u_1}\sin\theta_1 \cdot -\mathbf{u_0}\sin\theta_0, \dots] \\ &=[\cos\theta_0\cos\theta_1 + \mathbf{u_0}\sin\theta_0 \cdot \mathbf{u_1}\sin\theta_1, \dots]\end{aligned}$$

如果我们把 q_0 和 q_1 看成四元向量, 也就是: $q_0 = \begin{bmatrix}\cos\theta_0 \\ u_{0x}\sin\theta_0 \\ u_{0y}\sin\theta_0 \\ u_{0z}\sin\theta_0\end{bmatrix}, q_1 = \begin{bmatrix}\cos\theta_1 \\ u_{1x}\sin\theta_1 \\ u_{1y}\sin\theta_1 \\ u_{1z}\sin\theta_1\end{bmatrix}$, 根据向量的点乘关系: $q_0 \cdot q_1 = |q_0| \cdot |q_1| \cos\theta$, 这个 θ 就是向量之间的夹角, 而因为 q_0, q_1 都是单位四元数。所以 $q_0 \cdot q_1 = \cos\theta$.

而非常有意思的是, 这个向量点乘的结果正好也等于四元数 Δq 的实部。Δq 表示的是一个旋转, 如果它代表的旋转角度是 2ϕ, 那么它对应的实部则是:$\Delta q = [\cos\phi, \dots]$.

所以:

$$\Delta q = [\cos\phi, \dots] = [\cos\theta, \dots] \cos\phi = \cos\theta$$

又 ϕ, θ 均为夹角, $\phi, \theta \in [0, 2\pi]$, 有:

$$\phi = \theta$$

> "这也就是说, q_0 与 q_1 作为向量在 4D 四元数空间中的夹角 θ, 正好是它们旋转变化量 Δq 的所代表旋转的角度的一半, 即 $\theta = \frac{1}{2}2\phi$. 所以, 我们可以直接用插值向量的方法对旋转进行插值."

这个结论给我们的巨大解放就是我们不需要使用上面得到的公式 $q_t = (q_1 q_0^*)^t q_0$ 计算幂来进行插值, 可以使用更简单的向量插值。

8 Lerp, Nlerp, Slerp

因为我们已经把四元数插值转换为向量插值，所以我们需要做的就是将中间向量 $\mathbf{v}_t$ 写成初始向量 $\mathbf{v}_0$ 和最终向量 $\mathbf{v}_1$ 的线性组合：

$$\mathbf{v}_t = \alpha\mathbf{v}_0 + \beta\mathbf{v}_1$$

其中 α, β 是 t 的函数，不同的插值方法对应不同的系数。

8.1 Lerp

Lerp (Linear Interpolation) 大家应该很熟悉了：

$$\mathbf{v}_t = Lerp(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, t) = (1-t)\mathbf{v}_0 + t\mathbf{v}_1$$

将 Lerp 应用到单位四元数上：

$$q_t = Lerp(q_0, q_1, t) = (1-t)q_0 + tq_1$$

这样会造成的问题是中间插值的四元数不一定是单位四元数，我们也说过，旋转使用单位四元数来表示的。所以这就引出了 Nlerp.

8.2 NLerp

虽然使用 lerp 插值出来的 q_t 不是单位四元数，但是我们将 q_t 除以它的模长 $||q_t||$ 就将其转化为单位四元数了。这种方法称为正规化线性插值（Normalized Linear Interpolation)，同时，NLerp 的输入也一定要是单位向量，否则插值出来的结果不会经过初始和最终向量，其公式为：

$$\mathbf{v}_t = NLerp(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, t) = \frac{(1-t)\mathbf{v}_0 + t\mathbf{v}_1}{||(1-t)\mathbf{v}_0 + t\mathbf{v}_1||}$$

$$q_t = NLerp(q_0, q_1, t) = \frac{(1-t)q_0 + tq_1}{||(1-t)q_0 + tq_1||}$$

NLerp 存在的问题是在于当需要插值的范围较大时，$\mathbf{v}_t$ 的角速度会有显著的变化。

8.3 Slerp

为了解决角速度的问题，我们可以对角度来进行插值，如果 $\mathbf{v}_0$ 和 $\mathbf{v}_1$ 之间的夹角是 θ，那么:

$$\theta_t = (1-t)\cdot 0 + t\theta = t\theta$$

这叫做球面线性插值 (Spherical Linear Interpolation)。上面的公式并没有向量出现，我们还是希望写成之前的形式:

$$\mathbf{v}_t = \alpha\mathbf{v}_0 + \beta\mathbf{v}_1$$

先上式两边同时乘以 $\mathbf{v}_0$:

$$\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{v}_t = \mathbf{v}_0\cdot(\alpha\mathbf{v}_0 + \beta\mathbf{v}_1)$$

$$\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{v}_t = \alpha(\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{v}_0) + \beta\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{v}_1$$

$\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{v}_t$ 之间的夹角是 $t\theta$, $\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{v}_0$ 之间夹角是 0, $(\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{v}_1)$ 之间夹角是 θ. 上面的式子两边同时取 cos，可得:

$$\cos(t\theta) = \alpha + \beta\cos\theta$$

用插值的式子两边同时乘以 $\mathbf{v}_1$:

$$\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_t = \mathbf{v}_1\cdot(\alpha\mathbf{v}_0 + \beta\mathbf{v}_1)$$

$$\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_t = \alpha(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_0) + \beta\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1$$

根据类似的分析，我们可得:

$$\cos((1-t)\theta) = \alpha\cos\theta + \beta$$

根据这两个式子和三角恒等式，我们能够解出向量和四元数的 Slerp 公式：

$$\mathbf{v}_t = Slerp(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, t) = \frac{\sin((1-t)\theta)}{\sin\theta}\mathbf{v}_0 + \frac{\sin(t\theta)}{\sin\theta}\mathbf{v}_1$$

$$q_t = Slerp(q_0, q_1, t) = \frac{\sin((1-t)\theta)}{\sin\theta}q_0 + \frac{\sin(t\theta)}{\sin\theta}q_1$$

q_0 和 q_1 之间的夹角 θ 则可以直接用其点乘结果算出：

$$\theta = \cos^{-1}(q_0 \cdot q_1)$$

使用 Slerp 有两个注意点：一是如果要插值的角度比较小的话，我们可以直接使用 Nlerp，误差并不会很大。二是如果 θ 非常小，$\sin\theta$ 可能会近似为 0.0, 所以如果夹角过小，但需要插值的话也选择 Nlerp.

至此，关于四元数的讨论先到此，我们进入另外一个常用的用来表示旋转的数学工具主题 - 李群和李代数。

9 李群与李代数

群：群是一种集合加上一种运算的代数结构，记为 (G,•). G 是集合，• 为该集合上的二元运算，这个运算需要满足一下性质：

- 封闭性: $\forall a_1, a_2 \in A, a_1 \bullet a_2 \in A$
- 结合律: $\forall a_1, a_2, a_3, (a_1 \bullet a_2) \bullet a_3 = a_1 \bullet (a_2 \bullet a_3)$
- 幺元: $\exists a_0 \in A, s.t. \forall a \in A, a_0 \bullet a = a \bullet a_0 = a$
- 逆: $\forall a \in A, \exists a^{-1} \in A, s.t. a \bullet a^{-1} = a_0$

常见矩阵群包括：

- GL(n) : 指 nxn 的可逆矩阵，它们的乘法成群
- SO(n) : 旋转矩阵群，SO(2), SO(3) 最常见，记法：$SO(n) = \left\{R \in R^{n\times n} | RR^T = I, det(R) = 1\right\}$

- 欧式变换: $SE(3) = \left\{ T = \begin{bmatrix} R & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \in R^{4\times4} | R \in SO(3), t \in R^3 \right\}$

如果把运算看做矩阵的乘法，可以验证它满足上述四条性质：封闭性、结合律、幺元、逆。容易验证 - 旋转矩阵、欧式变换成群。

9.1 李群

“李群是具有群结构的光滑微分流形，其群作用与微分结构相容。”

先定义流形（manifold）: smooth topological surface，这三个英文单词加在一起可以很好地解释 manifold. 基本上就把它看成是一个光滑的结构，比如球面，比如各种七扭八扭的面。

再定义群作用: 群作用是群中的元素具有改变其它集合中元素的能力，比如我们的旋转群，如果把它运用在空间中向量上，那么它可以旋转向量。

更正规一点的定义如下：

群作用是比如我们有一个李群 G，然后有一个集合 V，那么 $g•v$ 就是群作用 $g \in G, v \in V$. • 需要满足：

- 幺元: g • v = v
- 结合律: (g • h) v = g • (h • v)

基本上对于我们的旋转群、欧式变换群、单位复数群这个群作用就是左乘，因为这样交就改变了元素，单位四元数群的群作用稍有不同，是左乘和右乘：

- SO(n) 旋转矩阵：$\mathbf{R} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{Rx}$
- SE(n) 欧式矩阵：$\mathbf{H} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{Rx} + t$
- S^1 单位复数：$\mathbf{z} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{zx}$
- S^3 单位四元数：$\mathbf{q} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{qxq}^*$

明白了李群的定义之后，我们需要知道，有几种观点可以用来看待李群：

- 拓扑：切空间（tangent space）、指数映射（exponential map）
- 代数：群操作（group operation）、具体实现（concrete realization）、群作用（group action）
- 几何：群作用（group action）带来的位置、速度、朝向的变化

9.2 李代数

"李代数对应李群的正切空间，它描述了李群局部的导数。"

研究一下对于三维旋转群 SO(3): $RR^T = I$, 假设我们 R 随着时间变化，也就是：$R(t)R(t)^T = I$，求导：

$$\dot{R}(t)R(t)^T + R(t)\dot{R}(t)^T = 0$$

$$\dot{R}(t)R(t)^T = -R(t)\dot{R}(t)^T = -(\dot{R}(t)R(t)^T)^T$$

$\dot{R}(t)R(t)^T$ 是一个反对称矩阵，反对称矩阵 A 可以把它对应为向量, 就像我们之前绕向量 u 的旋转中做的一样：

$$[\boldsymbol{\omega}]_x = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\dot{R}(t)R(t)^T$ 可以写做：

$$\dot{R}(t)R(t)^T = [\boldsymbol{\omega}(t)]_x$$

又旋转矩阵的性质 - $RR^T = I$:

$$\dot{R}(t) = [\boldsymbol{\omega}(t)]_x R(t) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} R(t)$$

因为 $\boldsymbol{\omega}$ 反映了 R 的导数性质，它在 $SO(3)$ 的正切空间上 (tangent space)。

而 $\boldsymbol{\omega}$ 就是李代数中的元素，对应于 $SO(3)$, 我们一般用小写的 $so(3)$ 来代表李群对应的李代数，所以 $\boldsymbol{\omega} \in so(3)$

> “对于某个时刻的 R(t)（李群空间），存在一个三维向量 $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$（李代数空间），用来描述 R 在 t 时刻的局部的导数。”

继续考虑

$$\dot{R}(t) = [\boldsymbol{\omega}(t)]_x R(t)$$

如果把它看做一般的微分方程：

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

解之：

$$x(t) = e^{At}x(0)$$

所以：

$$R(t) = \exp([\boldsymbol{\omega}(t)]_x)R(t_0)$$

再认识两个操作符：

- Hat $\wedge$: 把向量对应到它的反对称矩阵
- Vee $\vee$: 把反对称矩阵转化为向量

$$\boldsymbol{\omega}^{\wedge} = [\boldsymbol{\omega}]_x = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\boldsymbol{\omega}]_x^{\vee} = [\omega_1, \omega_2, \omega_3]$$

在阅读文档的时候也经常会见到 Hat 和 Vee 来表示的李代数。

9.3 指数映射

现在我们来考究

$$R(t) = \exp([\boldsymbol{\omega}(t)]_x) R(t_0)$$

对于矩阵的指数映射，可以用泰勒展开，当结果收敛的时候其结果依旧是一个矩阵：

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

定义向量 $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\theta} = \mathbf{u}\theta$ ，其中 $\mathbf{u}$ 为单位向量，θ 为旋转角，这个其实是旋转的轴角表示，也叫欧拉向量。

$$\exp([\boldsymbol{\theta}]_x) = \sum_k \frac{\theta^k}{k!} ([\mathbf{u}]_x)^k$$

为了展开，我们来计算一些 $[\mathbf{u}]_x$:

$$\begin{aligned}
&[\mathbf{u}]_x^0 = I, && [\mathbf{u}]_x^1 = [\mathbf{u}]_x, \\
&[\mathbf{u}]_x^2 = \mathbf{u}\mathbf{u}^{\mathbf{T}} - I, && [\mathbf{u}]_x^3 = -[\mathbf{u}]_x, \\
&[\mathbf{u}]_x^4 = -[\mathbf{u}]_x^2, && \cdots
\end{aligned}$$

所以:

$$\begin{aligned}
\exp([\boldsymbol{\omega}]_x) = & \exp([\boldsymbol{\theta}]_x) \\
= & I + [\mathbf{u}]_x (\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \cdots) + [\mathbf{u}]_x^2 (\frac{1}{2!}\theta^2 - \frac{1}{4!}\theta^4 + \frac{1}{6!}\theta^6 - \cdots) \\
= & I + [\mathbf{u}]_x \sin\theta + [\mathbf{u}]_x^2 (1 - \cos\theta)
\end{aligned}$$

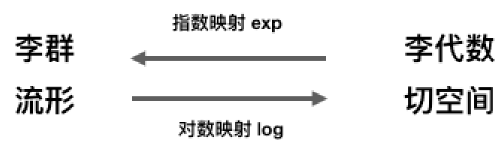
这也是罗德里格斯旋转公式，指数映射是有 closed form 的.

> “so(3) 的李代数空间就是由旋转向量组成的的空间，其物体意义就是旋转向量。指数映射关系就是罗德里格斯旋转公式，他们在数学上本质是一样。”

利用对数映射我们也可以把 $SO(3)$ 中的元素对应到 $so(3)$ 中，不过既然我们已经知道了 $so(3)$ 是旋转向量构成的空间，所以我们算出旋转轴和旋转角就可以直接写出 $so(3)$ 中的元素。

实际上，对于李群和李代数都有这样的指数映射和对数映射的关系：

图 10: 李群与李代数



9.4 $SO(3)$ 和 $so(3)$

$SO(3)$ 和 $so(3)$ 我们都已经写到了，这里我们尝试按照我们之前介绍的，用不同的方式来看待它。

- 拓扑：我们把李群 $SO(3)$ 看做流形，而李代数 $so(3)$ 就是流形对应的切空间（tangent space），通过对数映射 (logarithm map) 我们可以从流形 $SO(3)$ 到达它的切空间/李代数 $so(3)$, 通过指数映射（exponential map）我们可以从李代数/切空间 $so(3)$ 回到流形 $SO(3)$. 把旋转矩阵想象成流形虽然感觉有一点诡异，但是因为旋转矩阵起到的作用就是可以旋转物体，所以把它想象成空间中一种光滑的面也算合理

- 代数：我们已经看到了从 $so(3)$ 到 $SO(3)$ 是通过指数映射以及其实就是罗德里格斯旋转公式、稍后我们会继续看从 $SO(3)$ 到 $so(3)$ ，以及矩阵的具体实现（concrete realization）

- 几何：群作用（group action）$SO(3)$ 带来旋转

先继续回顾：

- SO(3) : 3x3 旋转矩阵，虽然有 9 个数，但是只有 3 个自由度，转轴 $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ 为单位向量，所以自由度为 2，再加上转动过的角度 θ
- so(3) : 向量 $\boldsymbol{\theta} = \theta\mathbf{u}$，有三个自由度 $\boldsymbol{\theta} = \theta(u_x, u_y, u_z)$，同时这个向量也可以写成反对称矩阵

9.4.1 $so(3) \to SO(3)$

指数映射（Exponential map）所做的是：

$$
\begin{aligned}
\exp : so(3) &\to SO(3) \\
\boldsymbol{\theta} &\to R_{3\times 3}
\end{aligned}
$$

之前已经推导出来：

$$\exp(\boldsymbol{\theta}) = \exp(\theta\mathbf{u}) = I + [\mathbf{u}]_x \sin\theta + [\mathbf{u}]_x^2(1-\cos\theta)$$

那么，当我们被给一个李代数 $so(3)$ 上的元素，我们当然可以利用上面的式子把它映射到李群 $SO(3)$ 上，注意，给我们的这个元素当然可以是向量或者矩阵，如果给我们的直接是一个矩阵，这个矩阵必定是一个反对称矩阵。

如果给我们的是向量 $\boldsymbol{\omega}$ ： 如果要代入上面的式子我们需要把它分解成大小和方向，假设大小是 $\theta = |\boldsymbol{\omega}|$ ，它的单位方向向量则是 $\hat{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega}/\theta$，$[\boldsymbol{\omega}]_x$ 为此向量的反对称矩阵：

$$\theta = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}$$

$$\exp(\boldsymbol{\omega}) = I + \frac{\sin\theta}{\theta}[\boldsymbol{\omega}]_x + \frac{1-\cos\theta}{\theta^2}[\boldsymbol{\omega}]_x^2$$

注意这个式子里的 θ 依旧是向量的模长，而之所以有这个除以 θ 的操作是因为我们需要把向量/矩阵标准化 (normalize)。

那么如果给我们的矩阵 Ω，Ω 必定为反对称矩阵，本质也是一样的，我们只需要把它记得 so(3) 中的元素可以写成向量或者它的反对称矩阵。

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

甚至我们可以算出 Ω^2 的迹等于模长平方的-2 倍，所以也可以写成这样：

$$\theta = \sqrt{-\frac{1}{2}Tr(\Omega^2)}$$

$$\exp(\Omega) = I + \frac{\sin\theta}{\theta}\Omega + \frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\Omega^2$$

如果觉得直接从上述式子推导出这个结论不够严密的话，这里补充一点数学过程：

先再次观察 $so(3)$，$so(3)$ 中的元素可以看成矩阵，这个矩阵为反对称矩阵，我们用 Ω 来表示：

$$\Omega = [\boldsymbol{\omega}]_x = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

这个矩阵可以看成是 $E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 组合而成，$\Omega = \omega_1 E_1 + \omega_2 E_2 + \omega_3 E_3$，也就是：

$$\boldsymbol{\omega} \in R^3$$

$$\omega_1 E_1 + \omega_2 E_2 + \omega_3 E_3 \in so(3)$$

观察 $\boldsymbol{\omega}=\begin{bmatrix}\omega_1\\\omega_2\\\omega_3\end{bmatrix}$, 作为向量，它的模长:

$$\theta^2=\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2$$

$$\theta^2=\begin{bmatrix}\omega_1 & \omega_2 & \omega_3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\omega_1\\\omega_2\\\omega_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{\omega}^T\boldsymbol{\omega}$$

计算作为矩阵的 $\Omega^n, n=1,2,3...$:

$$\Omega^0=I$$

$$\Omega=\begin{bmatrix}0 & -\omega_3 & \omega_2\\\omega_3 & 0 & -\omega_1\\-\omega_2 & \omega_1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\Omega^2=\begin{bmatrix}0 & -\omega_3 & \omega_2\\\omega_3 & 0 & -\omega_1\\-\omega_2 & \omega_1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -\omega_3 & \omega_2\\\omega_3 & 0 & -\omega_1\\-\omega_2 & \omega_1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\omega_3^2-\omega_2^2 & \omega_1\omega_2 & \omega_1\omega_3\\\omega_2\omega_1 & -\omega_3^2-\omega_1^2 & \omega_2\omega_3\\\omega_3\omega_1 & \omega_2\omega_3 & -\omega_1^2-\omega_2^2\end{bmatrix}$$

这里我们可以观察到 $tr(\Omega^2)=-2(\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2)=-2\theta^2$

$$\Omega^3=\begin{bmatrix}-\omega_3^2-\omega_2^2 & \omega_1\omega_2 & \omega_1\omega_3\\\omega_2\omega_1 & -\omega_3^2-\omega_1^2 & \omega_2\omega_3\\\omega_3\omega_1 & \omega_2\omega_3 & -\omega_1^2-\omega_2^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -\omega_3 & \omega_2\\\omega_3 & 0 & -\omega_1\\-\omega_2 & \omega_1 & 0\end{bmatrix}=-\theta^2\begin{bmatrix}0 & -\omega_3 & \omega_2\\\omega_3 & 0 & -\omega_1\\-\omega_2 & \omega_1 & 0\end{bmatrix}=-\theta^2\Omega$$

甚至所以有 $\Omega^3=-\theta^2\Omega$, 继续:

$$\Omega^4=\Omega\Omega^3=-\theta^2\Omega^2$$

$$\Omega^5 = \Omega^3\Omega^2 = -\theta^2\Omega\Omega^2 = -\theta^2\Omega^3 = \theta^4\Omega$$

所以有

$$\begin{aligned}
\theta^2 &= \boldsymbol{\omega}^T\boldsymbol{\omega} \\
\Omega^{2i+1} &= (-1)^i\theta^{2i}\Omega \\
\Omega^{2i+2} &= (-1)^i\theta^{2i}\Omega^2
\end{aligned}$$

展开:

$$\begin{aligned}
\exp(\Omega) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\Omega^n \\
&= I + \left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i\theta^{2i}}{(2i+1)!}\right)\Omega + \left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i\theta^{2i}}{(2i+2)!}\right)\Omega^2 \\
&= I + (1 - \frac{\theta^2}{3!} + \frac{\theta^4}{5!} + \cdots)\Omega + (\frac{1}{2!} - \frac{\theta^2}{4!} + \frac{\theta^4}{6!} + \cdots)\Omega^2
\end{aligned}$$

有欧拉公式:

$$\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots
\end{aligned}$$

所以:

$$\exp(\Omega) = I + (\frac{\sin\theta}{\theta})\Omega + (\frac{1-\cos\theta}{\theta^2})\Omega^2$$

如果我们需要更严密一点的话，也需要考虑当 θ 足够小的情况，所以有:

Theorem 14 ($so(3) \rightarrow SO(3)$)

$$\Omega \in so(3)$$

$$\theta = \sqrt{-\frac{1}{2}tr(\Omega^2)}$$

$$\exp(\Omega) = \begin{cases} I & \theta \simeq 0 \\ I + (\frac{\sin\theta}{\theta})\Omega + (\frac{1-\cos\theta}{\theta^2})\Omega^2 & \theta \neq 0 \end{cases}$$

9.4.2 $SO(3) \rightarrow so(3)$

$$\log : SO(3) \rightarrow so(3)$$
$$R_{3\times 3} \rightarrow \boldsymbol{\theta}$$

我们当然可以通过对数映射将元素从 $SO(3)$ 到 $so(3)$, 但我之前也写过，既然我们已经知道了 $so(3)$ 是旋转向量构成的空间，所以算出旋转轴和旋转角就可以写出 $so(3)$ 中的元素。

那么，给我们一个旋转矩阵 R，我们如何知道旋转轴和旋转角度呢? 这个问题在之前的章节 旋转轴与旋转角度 一节中经解决了，甚至连规范化（normalized）的反对称矩阵我们都有了公式，那就是:

$$\theta = \arccos(\frac{1}{2}[tr(R) - 1])$$
$$\frac{1}{2\sin\theta}(R - R^T) = \begin{bmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{bmatrix}$$

当然我们需要把这个还原成单个向量的形式，也就是模长乘以单位向量 ($\boldsymbol{\theta} = \theta\mathbf{u}$) 的形式，所以 so(3) 上的元素的反对称矩阵形式为（如果要向量形式就做一下 Vee ∨ 操作）：

$$\theta = \arccos(\frac{1}{2}[tr(R) - 1])$$

$$\log(R) = \frac{\theta}{2\sin\theta}(R - R^T)$$

同样，我们给出更严密一点的计算公式：

Theorem 15 ($SO(3) \to so(3)$)

$$R \in SO(3)$$

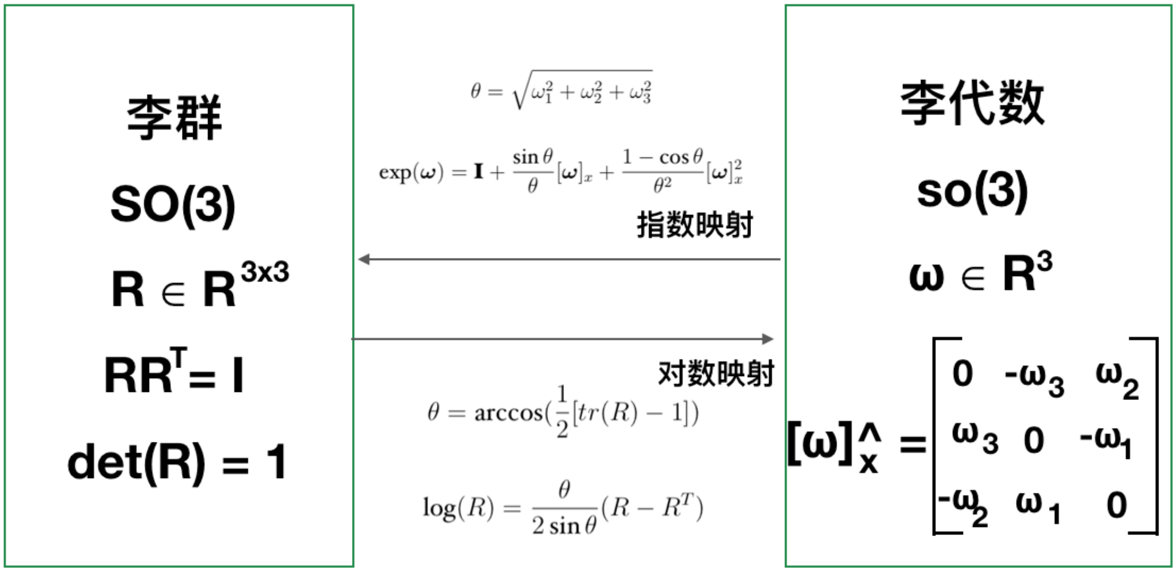
$$\theta = \arccos(\frac{1}{2}[tr(R) - 1])$$

$$\log(R) = \begin{cases} \theta \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \theta \simeq 0 \\ \frac{\theta}{\sin\theta}\left(R - R^T\right) & \theta \neq 0 \end{cases}$$

至此，关于 $SO(3)$ 和 $so(3)$ 矩阵的具体实现我们也已经推导完毕。

一张图来总结：

图 11: $SO(3) \leftrightarrow so(3)$



9.5 $SE(3)$ 和 $se(3)$

$SE(3)$ 是旋转加上位移，也称欧式变换（Euclidean transformation），刚体变换（Rigid Transformation），一般我们用 $\begin{bmatrix} \mathbf{R} & t \\ \mathbf{o} & 1 \end{bmatrix}$ 来表示，其中 $\mathbf{R}$ 为旋转，t 为位移，所以有 6 个自由度，3 个旋转，3 个位置。这里并且用上了 homogeneous coordinates.

9.5.1 $se(3) \to SE(3)$

模仿之前对于 $so(3)$ 中的元素的看法，$se(3)$ 中的元素可以这样看:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\rho} & \boldsymbol{\omega} \end{pmatrix}^T \in R^6$$

$$\rho_1 P_1 + \rho_2 P_2 + \rho_3 P_3 + \omega_1 E_1 + \omega_2 E_2 + \omega_3 E_3 \in se(3)$$

其中：$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

那么计算它的指数映射：

$$\begin{aligned} \exp\left(\begin{bmatrix} \Omega & p \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\begin{bmatrix} \Omega & p \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)^n \\ &= I + \begin{bmatrix} \Omega & p \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{bmatrix} \Omega^2 & \Omega p \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{3!}\begin{bmatrix} \Omega^3 & \Omega^2 p \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \cdots \end{aligned}$$

所以：

$$\exp\left(\begin{bmatrix} \Omega & p \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \exp(\Omega) & Vp \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中

$$V = I + \frac{1}{2!}\Omega + \frac{1}{3!}\Omega^2 + \cdots$$

在根据之前的结论：

$$V = I + \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \theta^{2i}}{(2i+2)!}\right)\Omega + \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \theta^{2i}}{(2i+3)!}\right)\Omega^2$$

同样展开和利用欧拉公式：

$$V = I + \left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\right)\Omega + \left(\frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\right)\Omega^2$$

所以可得公式：

$$\exp\left(\begin{bmatrix}\Omega & p\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}\exp(\Omega) & Vp\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

同样，严密一点写出结论：

$$\begin{bmatrix}\Omega & p\\ 0 & 0\end{bmatrix} \in se(3)$$

$$\exp(\begin{bmatrix}\Omega & p\\ 0 & 0\end{bmatrix}) = \begin{bmatrix}\exp(\Omega) & Vp\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$V = I + (\frac{1-\cos\theta}{\theta^2})\Omega + (\frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3})\Omega^2$$

$$\theta = \sqrt{-\frac{1}{2}tr(\Omega^2)}$$

Theorem 16 ($se(3) \to SE(3)$)

$$\begin{bmatrix}\Omega & p\\ 0 & 0\end{bmatrix} \in se(3)$$

$$\exp(\begin{bmatrix}\Omega & p\\ 0 & 0\end{bmatrix}) = \begin{bmatrix}\exp(\Omega) & Vp\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$V = I + (\frac{1-\cos\theta}{\theta^2})\Omega + (\frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3})\Omega^2$$

$$\theta = \sqrt{-\frac{1}{2}tr(\Omega^2)}$$

9.5.2 $SE(3) \to se(3)$

$SE(3)$ 到 $se(3)$ 同样是用对数映射可以得到，不过我们继续用已经得到的结论：

$$\begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in SE(3)$$

$$\log(\begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} \log(R) & V^{-1}t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\theta = \arccos(\frac{1}{2}[tr(R) - 1])$$

$$V = I + (\frac{1 - \cos\theta}{\theta^2})\Omega + (\frac{\theta - \sin\theta}{\theta^3})\Omega^2$$

V^{-1} 也有 closed form，可以通过计算得到，可以写成如下:

$$V^{-1} = I - \frac{1}{2}\Omega + \frac{1}{\theta^2}(1 - \frac{A}{2B})\Omega^2$$

$$A = \frac{\sin\theta}{\theta}, B = \frac{1 - \cos\theta}{\theta^2}$$

Theorem 17 ($SE(3) \to se(3)$)

$$\begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in SE(3)$$

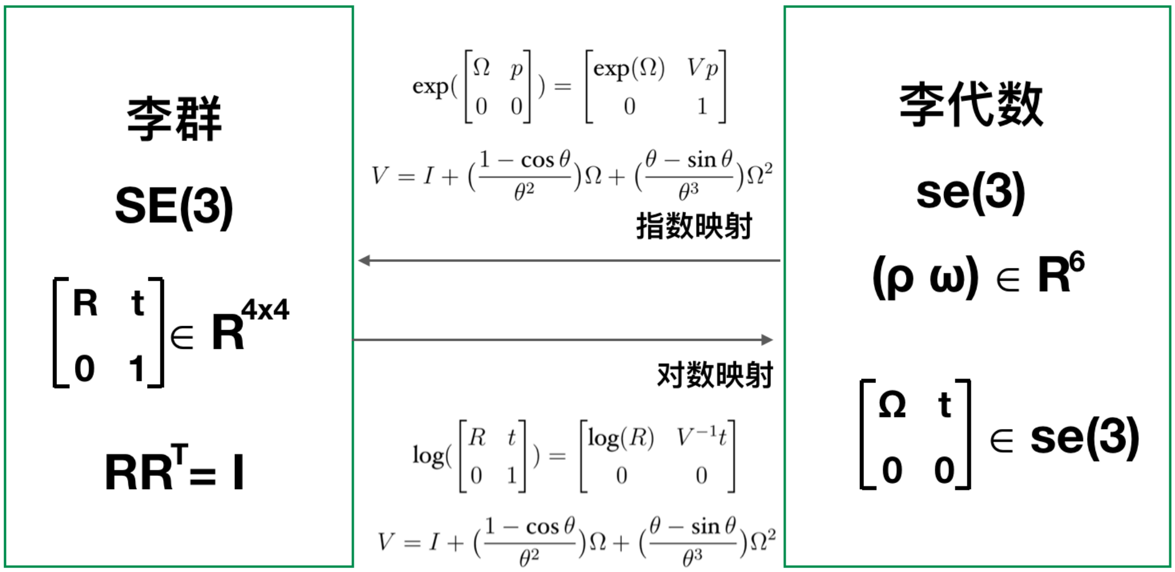
$$\log(\begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} \log(R) & V^{-1}t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V = I + (\frac{1 - \cos\theta}{\theta^2})\Omega + (\frac{\theta - \sin\theta}{\theta^3})\Omega^2$$

$$\theta = \arccos(\frac{1}{2}[tr(R) - 1])$$

同样，一张图总结 $se(3)$ 和 $SE(3)$:

图 12: $SE(3) \leftrightarrow se(3)$



10 旋转的插值-李群

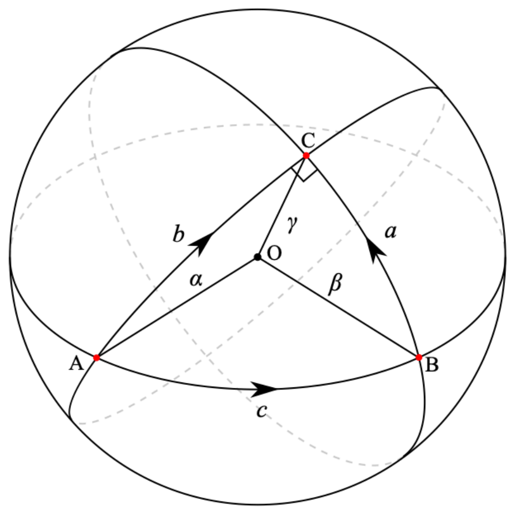
了解 $SO(3), so(3), SE(3), se(3)$ 之后，我们可以利用李群的性质对旋转，欧式变换进行插值。

10.1 测地线 - geodesic

> “测地线又称大地线或短程线，数学上可视作直线在弯曲空间中的推广；在有度规定义存在之时，测地线可以定义为空间中两点的局域最短路径。”

比如看 wikipedia 的这个例子：
3 条测地线构成的球面三角形。在球面上，测地线是大圆。

图 13: *geodesic*



针对李群这样的流形，它的测地线可以通过李群和李代数计算得出：

图 14: *geodesic*

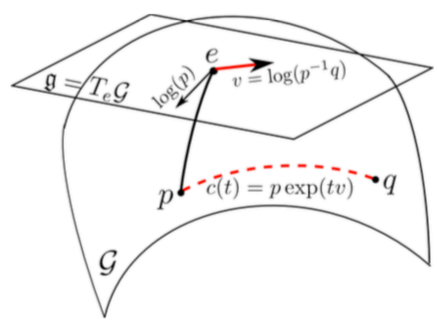


Fig. 2. Exponential & Log map on a matrix Lie group $\mathcal{G}$. The vector $v = \log(p^{-1}q) \in \mathfrak{g}$ shown in red, can be used to compute the geodesic between p and q as $c(t) = p\exp(tv)$, shown as a red curve with dashes.

矩阵李群 G 上的指数和对数图。用红色表示的向量 $v = \log(p^{-1}q) \in g$，可用于计算 p 和 q 之间的测地线，如 $c(t) = p\exp(tv)$，显示为带有虚线的红色曲线。

10.2 插值

假设有旋转变换 R, 我们希望找出中间变换 $T_t, t \in [0,1]$，使得初始变换 I 能平滑的过渡到最终变换 R, $t=0$ 时 $T_t = I$, $t=1$ 时 $T_t = R$。根据我们之前所学的知识，我们可以有式子：

$$T_t = \exp(t \log(R))$$

log 和 exp 就是旋转群对应的对数映射和指数映射。

Theorem 18 (旋转的插值 - $I \rightarrow R$)
有旋转变换 R, 我们希望找出中间变换 $T_t, t \in [0,1]$，使得初始变换 I 能平滑的过渡到最终变换 R, $t=0$ 时 $T_t = I$, $t=1$ 时 $T_t = R$:

$$T_t = \exp(t \log(R))$$

如果初始变换不是 I, 我们需要从 R_0 平滑插值到 R_1, 中间变换 $T_t, t \in [0,1]$，需要满足 $t=0$ 时 $T_t = R_0$, $t=1$ 时 $T_t = R_1$。根据我们之前所学的知识，我们可以有式子：

$$T_t = R_1 \exp(t \log(R_1^{-1} R_2))$$

Theorem 19 (旋转的插值 - $R_0 \rightarrow R_1$)
有旋转变换 R_0, R_1, 我们希望找出中间变换 $T_t, t \in [0,1]$，使得初始变换 I 能平滑的过渡到最终变换 R, $t=0$ 时 $T_t = R_0$, $t=1$ 时 $T_t = R_1$:

$$T_t = R_1 \exp(t \log(R_1^{-1} R_2))$$

上述两个式子不仅仅是对于 $R \in SO(3)$ 适用，对于 $E \in SE(3)$ 也同样适用。

插值欧式变换，$t=0$ 时候物体的状态为 $I, t=1$ 时物体的状态为 E:

$$T_t = \exp(t \log(E))$$

Theorem 20 (欧式变换的插值 - $I \rightarrow R$)

$t=0$ 时候物体的状态为 $I, t=1$ 时物体的状态为 E:

$$T_t = \exp(t \log(E))$$

插值欧式变换，$t=0$ 时候物体的状态为 E_0，$t=1$ 时物体的状态为 E_1:

$$T_t = E_0 \exp(t \log(E_0^{-1} E_1))$$

Theorem 21 (欧式变换的插值 - $E_0 \rightarrow E_1$)

$t=0$ 时候物体的状态为 $E_0, t=1$ 时物体的状态为 E_1:

$$T_t = E_0 \exp(t \log(E_0^{-1} E_1))$$

甚至我们可以不仅仅插值 $t \in [0,1]$ ，可以甚至推广到 $t>1$ 或者 $t<0$ ，并且我们可以加上一些限制像生成 spline 一样平滑的插值多个变换。关于这个部分更详细的可以的阅读Affine Interpolation in a Lie Group Framework

11 参考

这篇读书笔记（总结）参考（抄写）了很多文章，附录如下:

- 四元数与三维旋转：CG 中关于四元数的一切，就看它了，也是这篇 doc 让我有想动笔写下总结的想法
- 视觉 SLAM 中的数学基础第三篇李群与李代数：看了第三篇关于李群和李代数的部分，第四篇对我来说用处不是特别大

论文:

- Affine Interpolation in a Lie Group Framework
- A micro Lie theory for state estimation in robotics 前 5 页把李群和李代数解释的很清楚
- Lie Groups for 2D and 3D Transformations 主要参考了里面公式推导的部分

wikipedia 还是很有用的:

- Rotation matrix
- Rotation (mathematics)
- Axis–angle representation： 其实这个旋转向量就是 $so(3)$ 中的元素
- Versor： 单位四元数
- Quaternion： 单位四元数
- 3D rotation group
- Rodrigues' rotation formula
- Quaternions and spatial rotation